B)

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$

Pour n = 0 , $0 < U_0 < 1$ est vraie par hypothèse .

Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a : $0 < U_n < 1$ et f_k est strictement croissante sur]0, 1 [

Donc $f_k(0) < f_k(U_n) < f_k(1)$ or $f_k(0) = 0$ et $f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ et

par suite $0 < U_{n+1} < 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 1$

$2°/ U_{n+1} = f_k(U_n) = \frac{U_n (U_n)^{k-1}}{\sqrt{U_n^2 + 1}} = U_n \cdot f_{k-1}(U_n)$ or $0 < U_n < 1 \Rightarrow$

$f_{k-1}(U_n) < f_{k-1}(1) \Rightarrow U_n \cdot f_{k-1}(U_n) < U_n \cdot f_{k-1}(1)$ d'où $U_{n+1} < \frac{U_n}{\sqrt{2}}$

3°/ a) $U_{n+1} < U_n \frac{1}{\sqrt{2}} < U_n$ d'où (U_n) est une suite décroissante .

b)On a : (U_n) est une suite décroissante , minorée par 0 donc (U_n) est convergente .

On a : $U_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} U_1$

$U_3 < \frac{1}{\sqrt{2}} U_2$

$\vdots$

$\forall n \geq 2$, $U_n < \frac{1}{\sqrt{2}} U_{n-1}$

D'où en multipliant membre à membre ces inégalités on obtient :

$\forall n \geq 2$, $U_2 \cdot U_3 \ldots U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \ldots U_{n-1}$ (car $U_k > 0$

pour $k \in \{ 1 , 2 , \ldots , n \}$) d'où $\forall n \geq 2$, $0 < U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} U_1$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ car $U_1 = 0$ car $-1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ d'où $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$